ISSN: 2036-5330
DOI: 10.32076/RA13107

L'interpretazione del simbolo di uguaglianza nel primo ciclo d'istruzione

Interpreting the equality symbol in primary and middle schools

Chiara Giberti[1]
Andrea Maffia[2]

Sintesi

Molti studenti considerano un'uguaglianza non come una relazione di equivalenza, ma come un "operatore" che indica lo svolgimento delle operazioni. In questo lavoro si presentano i risultati relativi a un questionario mirato a far emergere la contrapposizione tra queste due concezioni dell'uguaglianza nel corso del primo ciclo di istruzione. La percentuale di risposte corrette è superiore a quanto mostrato nella letteratura precedente, sebbene permangano alcune difficoltà. Inoltre, la concezione del simbolo di uguaglianza evolve positivamente nel percorso scolastico. Sebbene non generalizzabile, questa rilevazione forse mostra gli effetti positivi della variazione di alcune pratiche didattiche negli ultimi anni.

Parole chiave: Primo ciclo; Matematica; Uguaglianza; Operazioni aritmetiche; Early algebra.

Abstract

Many students interpret the equals sign as an "operator" indicating an operation to be performed, rather than as a relationship of equivalence. In this paper we present the results of a survey aimed at highlighting the contrast between these two different concepts of equality in primary and middle schools. The percentage of correct answers was higher than in previous studies, but some difficulties were still recorded. Furthermore, the concept of the equals symbol developed positively during schooling. Although the results cannot yet be generalised, they may depend on changes in certain educational methods in the last few years.

Keywords: Primary and middle schools; Mathematics; Equals symbol; Arithmetic operations; Early algebra.

1. Università di Bergamo, chiara.giberti@unibg.it
2. Università di Pavia, andrea.maffia@unipv.it

1. Introduzione

La ricerca in didattica della matematica si occupa da molto tempo delle difficoltà che gli studenti incontrano, durante il loro percorso scolastico, nell'interpretare il linguaggio matematico. Probabilmente, uno dei simboli che compare in modo più pervasivo all'interno delle notazioni matematiche di tutti i livelli scolari è il simbolo di uguaglianza, spesso chiamato dagli studenti semplicemente come "l'uguale". Varie ricerche a livello internazionale hanno mostrato da lungo tempo come l'interpretazione di questo simbolo possa mettere in difficoltà molti studenti (Behr *et al.*, 1980; Byers & Hersocvics, 1977; Vergnaud *et al.*, 1979). In un suo famoso articolo, Carolyn Kieran (1981) presenta una larga rassegna delle ricerche (sue e di altri) sull'interpretazione dell'uguaglianza. I dati presentati fanno riferimento a diversi gradi scolastici, dalla scuola dell'infanzia fino all'insegnamento universitario. Possiamo sommariamente dire che l'autrice evidenzia due diversi modi di interpretare il simbolo di uguaglianza:

- come un *operatore*, ovvero come indicazione del fatto che si "deve fare qualcosa", "svolgere un calcolo". Tipicamente, si nota che questa interpretazione porta a concatenazioni errate del tipo $3 + 2 = 5 + 4 = 9$.
- come simbolo di un'*equivalenza*, ovvero una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva. Il riconoscimento della verità di uguaglianze del tipo $3 + 4 = 6 + 1$ può essere considerato come indice di questo tipo di interpretazione del simbolo.

Kieran, inoltre, nota che evidenze del secondo tipo di interpretazione sono estremamente rare prima dei 13 anni di età dello studente. Questo non significa che non sia possibile intervenire didatticamente sulla visione dell'uguaglianza come equivalenza prima della fine del primo ciclo d'istruzione. Al contrario, il lavoro di Kieran indica che le pratiche didattiche più diffuse a quel tempo non permettevano lo sviluppo di una visione corretta del simbolo di uguaglianza. Vari gruppi di ricerca (Carpenter *et al.*, 2003; Stephens, 2006; Molina & Ambrose, 2008; Mason *et al.*, 2009; Malara & Navarra, 2003) hanno iniziato a studiare negli ultimi decenni come la didattica dell'aritmetica debba essere mutata per fornire agli studenti l'opportunità di sviluppare una corretta visione del simbolo di uguaglianza fin dall'inizio del percorso scolastico.

Nel 1999 Karen Falkner, Linda Levi e Thomas Carpenter pubblicarono i risultati di uno studio in verticale sull'interpretazione del simbolo di uguaglianza. Presentarono un'unica uguaglianza incompleta ($8 + 4 = ... + 5$) a studenti di scuola primaria (dalla classe prima alla sesta, dato che la scuola primaria statunitense dura un anno in più di quella italiana) chiedendo loro di completarla inserendo il numero mancante. Nel loro studio, la maggior parte degli studenti risponde 12 o 17, interpretando quindi il simbolo di uguaglianza come operatore: per loro indica che i numeri che si trovano alla sinistra dell'uguale, o addirittura tutti i numeri presenti nell'uguaglianza, devono essere sommati. In aggiunta a questo, Falkner e colleghi (1999) mostrano che i risultati non migliorano all'aumentare del grado scolastico. Le maggiori conoscenze riguardo alle operazioni e alle loro proprietà non permettono agli studenti degli ultimi anni di primaria di scegliere più frequentemente la risposta corretta. Al contrario, la percentuale di studenti che scelgono 12 come risposta è maggiore negli ultimi due anni rispetto agli anni precedenti. Risultati analoghi sono mostrati da ricerche svolte nel nostro Paese (cfr Camici *et al.*, 2002). Per esempio, Zan (2007) mostra come alcuni bambini italiani considerino il simbolo di uguaglianza «come un operaio, come un uomo che fa tutte le azioni della matematica perché lui dà il risultato» (p. 81) e mostrino una resistenza a modificare tale visione.

Molina e Ambrose (2008) hanno notato nei loro studi uno stadio intermedio rispetto ai due indicati precedentemente in riferimento alla ricerca di Kieran. Il loro modello di sviluppo dell'interpretazione del simbolo di uguaglianza prevede quindi tre stadi:

1. *Uguale come stimolo per una risposta.* Questa interpretazione è di tipo procedurale, e prevede un'interpretazione unidirezionale, da sinistra a destra (la relazione non è quindi riflessiva).
2. *Uguale come espressione di azione.* Anche in questo caso l'interpretazione è procedurale, ma bidirezionale (relazione riflessiva). Questa concezione viene manifestata dagli studenti che rispondono correttamente in completamenti del tipo … = 8 + 4, ma forniscono 12 come risposta per 8 + 4 = ... + 5.
3. *Uguale come espressione di equivalenza.* Questa è l'interpretazione relazionale e corrisponde alla corretta identificazione della relazione di uguaglianza con le sue proprietà di simmetria, riflessività e transitività.

Le autrici osservano inoltre che l'evoluzione non è lineare per tutti gli studenti. Alcuni saltano il secondo stadio; altri sono "instabili", nel senso che possono mostrare difficoltà diverse a seconda dell'uguaglianza su cui stanno lavorando, mostrando un'interpretazione relazionale in alcuni casi, ma procedurale in altri. Questo suggerisce l'importanza di indagare il fenomeno in modo longitudinale e utilizzando diversi tipi di uguaglianze.

Nella letteratura di ricerca, sia in psicologia educativa (e.g. McNeil, 2014; Rittle-Johnson, 2011), sia in didattica della matematica (cfr Carpenter *et al.*, 2003), si trovano numerose classificazioni simili. Lo scopo di tali classificazioni è quello di indirizzare nella creazione di traiettorie di apprendimento. L'obiettivo didattico a lungo termine è sviluppare un'interpretazione di questo simbolo matematico che sia coerente a quella necessaria nel contesto algebrico. Per raggiungerlo, vari autori propongono di lavorare su consegne quali il completamento di uguaglianze differenti, oppure la discussione collettiva di uguaglianze vere o false. L'assioma di partenza per questi ricercatori potrebbe essere sintetizzato così: una prima consapevolezza (anche intuitiva) delle relazioni tra i numeri e le operazioni è il fondamento principale per il successivo apprendimento dell'algebra. L'insieme delle ricerche che perseguono questo obiettivo prende il nome di *Early Algebra* (Cai & Knuth, 2011). Non si tratta di un'introduzione precoce del formalismo algebrico, ma piuttosto di un insieme di attività didattiche volte a mettere in evidenza il carattere "algebrico" dell'aritmetica. Dicono Carpenter e colleghi: «Il pensiero relazionale coinvolge le proprietà fondamentali dei numeri e delle operazioni nella trasformazione di espressioni matematiche invece che calcolare la risposta seguendo una sequenza prescritta di procedure. Questo implica un certo livello di consapevolezza delle proprietà, ma non necessariamente una comprensione completa di esse o la conoscenza delle definizioni formali» (2005, p. 54). Il lavoro sul simbolo di uguaglianza (fondamentale nell'impostare e risolvere equazioni) è un classico esempio.

In un suo articolo, John Mason (2018) sostiene che il riconoscimento della verità di un'uguaglianza come $87 + 54 = 84 + 57$ senza svolgere calcoli contribuisce al (ed è parte integrante del) pensiero algebrico. Sostiene che è fondamentale che gli studenti affrontino consegne simili sin dai primi anni di scuola. Per spiegare cosa può significare trasformare espressioni aritmetiche senza svolgere calcoli, analizziamo proprio l'esempio di Mason. Possiamo notare che ai due lati dell'uguaglianza ci sono delle addizioni che coinvolgono numeri formati dalle stesse decine, ma con la cifra dell'unità scambiata. Dato che scrivere 87 è un modo compatto per indicare la somma di 8 decine e 7 unità, così come 54 sta ad indicare il numero composto da 5 decine e 4 unità, è la stessa proprietà associativa della somma a garantire la veridicità di questa uguaglianza, senza bisogno di calcolare effettivamente il risultato delle addizioni mostrate. Nella letteratura in didattica della matematica troviamo numerosi altri esempi. Per stabilire se sia vero che $4 \times 6 = 12 + 12$ (Carpenter *et al.*, 2003) possiamo calcolare separatamente 4×6 e $12 + 12$ per poi notare che entrambe le operazioni danno lo stesso risultato. Oppure, possiamo notare che 12 è il doppio di 6 e che quindi fare $12 + 12$ significa fare il doppio del doppio di 6, il che equivale a moltiplicare il numero 6 per 4 volte. Ancora, possiamo scoprire quale numero manca per completare l'uguaglianza $73 + 49 = 72 + \ldots$ calcolando la somma $73 + 49$ per poi sottrarre 72 dal numero ottenuto. Oppure, potremmo notare che la differenza tra 73 e 72 è soltanto 1, quindi per mantenere invariata la somma complessiva, a 72 dovrò aggiungere un numero che sia 1 in più di 49, ovvero 50 (Stephen, 2006). In questo modo siamo in grado di indicare il completamento dell'uguaglianza senza conoscere il totale della somma $73 + 49$. Secondo Mason e colleghi (2009) queste modalità di operare con i numeri sono il primo passo fondamentale verso la generalizzazione di relazioni tra i numeri e le operazioni. Queste relazioni generali potranno poi essere applicate a un'infinità di altri casi numerici e diverranno fondamenta solide su cui fondare la futura didattica dell'algebra.

Numerose ricerche (si veda il testo di Carpenter *et al.*, 2003) testimoniano come questo tipo di strategie relazionali possano essere messe in atto anche spontaneamente dagli studenti della scuola del primo ciclo. A livello nazionale, risultati del tutto analoghi sono stati prodotti all'interno del progetto di ricerca "ArAl" (Malara & Navarra, 2003). Inoltre, esempi di buone pratiche sono disponibili in rete, ne sono un esempio i materiali raccolti in occasione del "Equal-Day", celebrato il giorno 11 novembre su vari social network e blog.

Possiamo affermare che la ricerca didattica fornisca solide evidenze del fatto che la scorretta interpretazione del simbolo di uguaglianza dipenda in buona parte dalle scelte didattiche, cioè dal modo in cui l'aritmetica viene insegnata (McNeil, 2008). Infatti, i bambini sono esposti in modo continuo a scritture della forma a + b = c, in cui il simbolo di uguaglianza è sempre preceduto da un'operazione (addizione, sottrazione, moltiplicazione o divisione) e sempre seguito da un unico numero, il risultato. In modo più o meno consapevole, gli studenti identificano ed estraggono regolarità e costruiscono nella loro memoria rappresentazioni prototipiche delle operazioni, rappresentazioni che rischiano di divenire talmente radicate (McNeil, 2014) da risultare poi difficilmente modificabili con gli apprendimenti successivi.

A distanza di più di quarant'anni dalle prime ricerche su questo tema, ci chiediamo se le pratiche didattiche più recenti possano aver avuto un'influenza positiva sul modo in cui gli studenti del nostro Paese interpretano il simbolo di uguaglianza. Abbiamo richiesto a studenti di diverse scuole di completare un questionario composto da svariate uguaglianze costruite al fine di essere analizzate alla luce delle difficoltà già messe in evidenza dalla letteratura sopracitata. Non si tratta quindi di uno studio di replicazione diretta, ma una replicazione di tipo concettuale (Frias-Navarro, 2020).

Analizzeremo le risposte date dagli studenti con una prospettiva di verticalità all'interno del primo ciclo di istruzione. Infatti, in relazione a un tema così cruciale e alla base di numerose competenze in ambito matematico, risulta fondamentale considerare l'unitarietà del curricolo all'interno del primo ciclo e studiare gli apprendimenti degli studenti in continuità tra scuola primaria e scuola secondaria di primo grado, come sottolineato anche nelle Indicazioni Nazionali per il curricolo del 2012 (MIUR, 2012).

L'importanza di un lavoro progressivo e continuo in tutto il primo ciclo di istruzione relativamente alla costruzione del concetto di uguaglianza viene sottolineata anche da Bagni (2008), che scrive:

> «[...] nel caso dell'uguaglianza, gli studenti devono essere progressivamente indotti ad un'analisi del concetto che si sviluppi dalla concezione di strumento a quella di oggetto, collocata ad esempio tra la Scuola Primaria e la Secondaria di I grado. Ciò eviterà una frattura tra la prospettiva dell'insegnante che intende l'uguaglianza come relazione binaria di equivalenza e quella dello studente che la vede soltanto come un indicatore procedurale orientato» (Bagni, 2008).

2. Un'indagine sugli studenti italiani

Con lo scopo di indagare l'interpretazione data al simbolo di uguaglianza, abbiamo somministrato a studenti del primo ciclo d'istruzione una serie di quesiti che richiedono il completamento di uguaglianze. Lo strumento di rilevazione è composto da 10 uguaglianze in comune tra tutti i livelli scolari e da altre specifiche per alcuni livelli (arrivando a un totale di 30 uguaglianze per le ultime classi della secondaria). Le uguaglianze comuni riguardano tutte l'operazione di addizione tra numeri minori di 10, in modo da poter essere affrontate anche dagli studenti della prima classe della scuola primaria. Per gli studenti di gradi scolari superiori abbiamo ideato uguaglianze ad hoc che coinvolgono tutte e quattro le operazioni e numeri a più cifre.

Il campione è un campione di convenienza composto da 36 classi provenienti da tre province: Firenze, Massa-Carrara e Ferrara. In totale, gli studenti che hanno risposto sono 775, così ripartiti:

- 153 studenti delle classi prime e seconde della scuola primaria;
- 162 studenti delle classi terze e quarte della scuola primaria;
- 204 studenti delle classi quinte primarie e prime della secondaria di primo grado;
- 256 studenti delle classi seconde e terze della secondaria di primo grado.

Abbiamo accorpato le classi in questo modo per poter confrontare i nostri dati con quelli precedentemente citati di Falkner e colleghi (1999) che restituiscono i loro risultati proprio accorpando a due a due i dati relativi ai primi sei anni di scolarizzazione. Nel loro studio sono coinvolti 300 studenti del primo biennio, 265 del secondo e 187 del terzo. Nel nostro caso, abbiamo anche a disposizione i dati relativi ad altri due gradi scolastici (gli ultimi due anni della scuola secondaria di primo grado) in modo da avere un'immagine complessiva di quello che, secondo la nostra normativa nazionale, è il primo ciclo d'istruzione.

Per brevità, non presentiamo i risultati di ciascuno dei quesiti proposti, ma ci limitiamo a una selezione di tre quesiti, particolarmente interessanti al fine di analizzare come l'interpretazione procedurale dell'uguale si modifichi nel corso del primo ciclo di istruzione.

La prima uguaglianza analizzata in questo lavoro, che chiameremo "uguaglianza A", è molto simile a quella proposta da Falkner e colleghi (1999) e successivamente ripresa da Molina e Ambrose (2008). Abbiamo in questo modo la possibilità di confrontare i risultati di questo particolare item con i risultati provenienti dalla letteratura, pur tenendo conto del fatto che, nel nostro caso, la somma dei numeri a sinistra dell'uguale vale 10, rendendo così più semplice il calcolo.

Uguaglianza A: $4 + 6 = \ldots. + 5$

Questa uguaglianza è stata somministrata a tutti gli studenti, dai primi anni della scuola primaria fino al termine della scuola secondaria di primo grado. Come sottolineato anche da Molina e Ambrose (2008), per completare correttamente l'uguaglianza gli studenti devono avere una concezione dell'uguale di tipo relazionale, considerando quindi entrambe le somme presenti. Ci aspettiamo quindi che studenti che non hanno ancora sviluppato a pieno una concezione relazionale dell'uguale possano considerare esclusivamente l'uguaglianza a sinistra e rispondere quindi 10. Sulla base dei risultati dello studio di Falkner e colleghi (1999) ci aspettiamo anche la somma di tutti i numeri presenti nell'uguaglianza (15) come possibile risposta frequente.

La seconda uguaglianza è molto simile alla precedente, ciò che cambia è l'operazione presente ai due membri dell'uguaglianza; differiscono quindi anche le possibili strategie che possono adottare gli studenti per individuare il numero corretto da inserire. Abbiamo somministrato questa domanda per osservare se fenomeni analoghi si verificano anche per l'operazione di moltiplicazione. In questo caso, l'uguaglianza è stata somministrata a partire dalla classe terza primaria.

Uguaglianza B: $4 \times 5 = \ldots. \times 10$

Anche in questo caso ci aspettiamo che studenti che non hanno ancora raggiunto una concezione relazionale del segno "uguale" possano rispondere con il risultato della moltiplicazione a sinistra (20) oppure moltiplicando tutti quanti i numeri presenti nell'uguaglianza (200).

L'ultima uguaglianza che prendiamo in considerazione in questo lavoro è un'uguaglianza somministrata a partire dalla classe quinta primaria fino alla classe terza secondaria di primo grado.

Uguaglianza C: $188 + 24 = \ldots. + 25$

L'uguaglianza è molto simile alla prima presa in considerazione e quindi a quelle analizzate negli studi precedentemente citati: l'uguaglianza prende in considerazione due somme e si chiede di inserire il primo termine della seconda operazione, i numeri sono più alti e quindi le operazioni più complesse ma, anche in questo caso, gli studenti potrebbero evitare lo svolgimento dei calcoli osservando che i secondi addendi di ciascuna somma differiscono tra loro di 1.

Anche in questo caso gli studenti che mostrano una visione esclusivamente procedurale dell'uguale possono essere portati a rispondere 212, sommando esclusivamente i due numeri a sinistra dell'uguale, oppure 237 (sommando tutti i numeri che compaiono nell'uguaglianza).

3. Risultati e discussione

La prima uguaglianza mostra risultati interessanti (riportati in Tab. 1) e facilmente confrontabili, in termini percentuali, con i risultati ottenuti da Falkner e colleghi nel 1999 (approfonditi in un successivo studio da Carpenter *et al.*, 2003), riportati nella Tab. 2.

Risposte	Gradi 1 e 2	Gradi 3 e 4	Gradi 5 e 6	Gradi 7 e 8
5 (corretta)	30%	50%	77%	82%
10	33%	35%	22%	8%
15	6%	3%	0%	0%
Altre risposte	29%	11%	1%	9%
Mancanti	3%	1%	0%	0%

Tab. 1 - *Risultati uguaglianza A (4 + 6 = …. + 5).*

Risposte	Gradi 1 e 2	Gradi 3 e 4	Gradi 5 e 6	Gradi 7 e 8
7 (corretta)	5%	9%	2%	-
12	58%	49%	76%	-
17	13%	25%	21%	-

Tab. 2 - *Risultati uguaglianza (8 + 4 = …. + 5).*
Fonte: Risultati dello studio di Falkner e colleghi (1999) come riportati da Carpenter (Carpenter *et al.*, 2003).

I risultati della nostra ricerca mostrano che, nei primi gradi scolastici, circa un terzo degli alunni riesce a rispondere correttamente; la percentuale di risposte corrette cresce all'aumentare del grado scolastico, ma anche al termine della scuola secondaria di primo grado circa uno studente su sei continua ad avere difficoltà nell'individuare il corretto completamento dell'uguaglianza, nonostante i numeri siano molto semplici.

Confrontando le percentuali di risposte corrette nel nostro studio con quelle riportate nello studio di Carpenter e colleghi (2003), osserviamo risultati nettamente più confortanti in tutti i gradi scolastici, che possono essere anche dati dai diversi numeri utilizzati nelle due ricerche: nel nostro caso infatti gli studenti possono ragionare anche in termini di "completamento alla decina" e questo potrebbe rendere più semplice l'individuazione del numero che completa correttamente l'uguaglianza. Nonostante ciò, non è da trascurare il fatto che un'uguaglianza che dovrebbe essere di facile risoluzione per gli studenti al termine della scuola primaria, continua a mettere in difficoltà una buona parte degli studenti, anche al termine del primo ciclo di istruzione.

Queste difficoltà possono essere interpretate considerando il fatto che le risposte errate più frequenti sono proprio quelle che, nella nostra analisi a priori, abbiamo indicato come evidenze di una concezione procedurale dell'uguale (10 e 15). Coerentemente con lo studio di Carpenter e colleghi (2003), la risposta errata più frequente è la somma dei due numeri a sinistra dell'uguale (10 nel nostro studio, 12 nello studio di Carpenter). Seguendo il modello di Molina e Ambrose (2008), gli studenti che rispondono in questo modo non hanno ancora raggiunto un'interpretazione relazionale del segno uguale: l'uguale per questi studenti è uno *stimolo per fornire una risposta* o al più una *espressione di una azione,* ma non è visto come *espressione di equivalenza.*

Mentre la percentuale di studenti che risponde sommando tutti i numeri (15) tende ad azzerarsi al termine del primo ciclo di istruzione, la percentuale di studenti che risponde 10 decresce nel percorso scolastico, ma ancora negli ultimi anni della scuola secondaria di primo grado l'8% degli studenti continua a scegliere questa risposta.

L'uguaglianza C, proposta esclusivamente a partire dal grado 5, conferma quanto finora osservato relativamente al fatto che i risultati migliorano con il passare degli anni ma che, al contempo, una percentuale non nulla di studenti continui a mostrare difficoltà legate a una concezione procedurale dell'uguale al termine della scuola secondaria di primo grado.

I risultati riportati in Tab. 3 mostrano una percentuale minore di studenti che risponde correttamente rispetto all'uguaglianza A. La differenza tra le percentuali di risposta corretta tra le due uguaglianze è più marcata per i gradi 5 e 6: alcuni studenti, al termine della scuola primaria, possono ancora trovarsi in difficoltà a effettuare calcoli con numeri "grandi", anche se, come già evidenziato nell'analisi a priori, la risposta a entrambi i quesiti poteva essere data anche senza effettuare la somma, ma osservando che nel primo caso si somma 24 mentre nel secondo 25 (ovvero 24+1).

In questo caso le risposte date sono più varie, in quanto molteplici risposte errate possono essere dovute a errori di calcolo. Il 7% degli studenti in tutti i gradi intervistati risponde 212, evidenziando quindi una concezione procedurale dell'uguale e confermando che anche al termine del primo ciclo di istruzione permane questo tipo di difficoltà.

Infine, i risultati dell'uguaglianza B - proposta dalla terza primaria (grado 3) fino al termine della secondaria di primo grado - permettono di osservare lo stesso fenomeno legato però a una differente operazione: la moltiplicazione. Come già osservato, anche le strategie potrebbero cambiare in questo caso, soprattutto per i gradi scolastici più alti in cui la moltiplicazione e le relative proprietà dovrebbero essere temi consolidati.

Anche in questo caso la percentuale di risposte corrette aumenta all'aumentare del grado scolastico, passando dal 55% a quasi il 90%. Mentre nei gradi scolastici più bassi emerge un'alta percentuale di studenti che indica altre risposte errate, nei gradi 7 e 8 risponde in modo errato un solo studente su 10, proponendo una risposta compatibile con una concezione procedurale dell'uguale.

Risposte	Gradi 1 e 2	Gradi 3 e 4	Gradi 5 e 6	Gradi 7 e 8
187 (corretta)	-	-	55%	76%
212	-	-	7%	7%
237	-	-	0%	0%
Altre risposte	-	-	30%	17%
Mancanti	-	-	8%	4%

Tab. 3 - *Risultati uguaglianza C (188 + 24 = …. + 25).*

Risposte	Gradi 1 e 2	Gradi 3 e 4	Gradi 5 e 6	Gradi 7 e 8
2 (corretta)	-	55%	68%	89%
20	-	13%	8%	6%
200	-	1%	0%	0%
Altre risposte	-	31%	22%	1%
Mancanti	-	0%	2%	4%

Tab. 4 - *Risultati uguaglianza B ($4 \times 5 = \ldots \times 10$).*

4. Conclusioni

La ricerca in didattica della matematica ha affrontato approfonditamente le difficoltà degli studenti legate all'uso del simbolo di uguaglianza. Si nota una tendenza degli studenti a considerare un'uguaglianza non come una relazione di equivalenza, che gode quindi delle proprietà tipiche di tali relazioni (riflessività, simmetria e transitività), ma come un "segno direzionale" (Camici *et al.*, 2002), come un "operatore" (Kieran, 1981) che indica lo svolgimento delle operazioni a sinistra del segno e l'annotazione del relativo risultato alla sua destra.

La concezione del simbolo di uguaglianza in termini procedurali viene ulteriormente distinta da Molina e Ambrose (2008) in due stadi: uguale come stimolo per una risposta a un calcolo (unidirezionale) e uguale come espressione di una azione (bidirezionale). In entrambi i casi gli studenti mostrano difficoltà con uguaglianze del tipo $8 + 4 = \ldots + 5$, in quanto non considerano il termine "5" e rispondono scrivendo il risultato dell'operazione $8 + 4$ (Falkner *et al.*, 1999).

Ispirandosi agli studi sopra citati, in questo lavoro sono stati presentati i risultati relativi al completamento di tre uguaglianze in cui il termine mancante è sempre il primo a destra del simbolo di uguaglianza. Abbiamo potuto così far emergere la contrapposizione tra la concezione dell'uguale unidirezionale e quella dell'uguale bidirezionale, che dovrebbe portare gli studenti a rispondere correttamente a uguaglianze come quelle proposte.

Il nostro lavoro ha permesso di studiare come queste concezioni evolvano nel corso del primo ciclo di istruzione, considerando le risposte fornite da un campione di convenienza di 775 studenti di tre regioni italiane. Non si tratta pertanto di risultati immediatamente generalizzabili.

Abbiamo messo a confronto i nostri risultati con quelli ottenuti in una ricerca simile da Falkner e colleghi (1999), nella quale la percentuale di risposte corrette rimaneva sotto il 10% dal grado 1 al grado 6, con un peggioramento dei risultati nei gradi 5 e 6. Dall'analisi delle risposte fornite dagli studenti coinvolti nel nostro studio emergono risultati più confortanti: la percentuale di risposte corrette è superiore e si evidenzia un miglioramento dei risultati con il procedere del percorso scolastico. Nel caso del particolare campione osservato, la concezione del simbolo di uguaglianza evolve durante il primo ciclo di istruzione e le difficoltà legate a un uso procedurale del simbolo di uguaglianza diminuiscono. I nostri risultati appaiono più positivi anche rispetto a quelli ottenuti, in contesto italiano, da Camici e colleghi nel 2002, forse questo è un segno che le pratiche didattiche sviluppate negli ultimi venti anni cominciano a sortire effetti positivi. Questo potrebbe dipendere dalla diffusione di particolari progetti (e.g. Malara & Navarra, 2003; Navarra, 2006) o dall'introduzione di nuove pratiche valutative (si pensi per esempio alle prove INVALSI).

Per quanto i risultati migliorino con il percorso scolastico, al termine del primo ciclo di istruzione una percentuale significativa di studenti del campione preso in esame mostra ancora importanti difficoltà che potrebbero influire notevolmente anche sulle possibilità di affrontare temi che tipicamente sono introdotti al termine della scuola secondaria di primo grado, quali la manipolazione di formule e la risoluzione di equazioni. L'importanza di lavorare su questi temi già nel primo ciclo di istruzione è enfatizzata dai risultati di Camici e colleghi (2002) che evidenziano come nel primo anno di scuola secondaria di secondo grado (grado 9) permanga una concezione procedurale dell'uguale per il 3,5% degli studenti, una percentuale piccola, ma comunque non nulla.

Infine, dalla comparazione tra le diverse uguaglianze proposte nel nostro studio, è stato possibile osservare come questi risultati siano coerenti tra loro quando si modificano i numeri coinvolti nell'uguaglianza e/o l'operazione. Si conserva la tendenza a un miglioramento dei risultati con il passare degli anni, ma vengono anche confermate le difficoltà persistenti per alcuni studenti al termine della scuola secondaria di primo grado. Le particolari uguaglianze proposte in questo lavoro possono essere utilizzate dagli insegnanti per avviare nelle proprie classi una riflessione sul loro modo di interpretare il simbolo "uguale" sin dai primissimi anni della scuola primaria.

Bibliografia

Bagni, G. T. (2008). Il segno di uguaglianza nella storia e nella didattica. *Multiverso, 6*(8), 18-19.

Behr, M. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching, 92*, 13-15.

Byers, V., & Herscovics, N. (1977). Understanding School Mathematics. *Mathematics Teaching, 81,* 24-27.

Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives.* Heidelberg: Springer Science & Business Media.

Camici, C., Cini, A., Cottino, L., Dal Corso, E., D'Amore, B., Ferrini, A., Francini, M., Maraldi, A. M., Michelini, C., Nobis, G., Ponti, A., Ricci, M., & Stella, C. (2002). Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 25*(3), 255-270.

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 53-59.

Falkner, K., Levi, L., & Carpenter, T. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232.

Frias-Navarro, D., Pascual-Llobell, J., Pascual-Soler, M., Perezgonzalez, J., & Berrios-Riquelme, J. (2020). Replication crisis or an opportunity to improve scientific production?. *European Journal of Education, 55*(4), 618-631.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326.

Malara, N. A., & Navarra, G. (2003). *ArAl Project: Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking.* Bologna: Pitagora.

Mason, J. (2018). How early is too early for thinking algebraically?. In Kieran C. (eds), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-year-olds* (pp. 329-350). Cham: Springer.

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

McNeil, N. M. (2008). Limitations to teaching children 2+ 2= 4: Typical arithmetic problems can hinder learning of mathematical equivalence. Child Development, 79(5), 1524-1537.

McNeil, N. M. (2014). A change–resistance account of children's difficulties understanding mathematical equivalence. *Child Development Perspectives, 8*(1), 42-47.

Molina, M., & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 30*(1), 61-80.

Navarra, G. (2006). Il Rinnovamento dell'insegnamento dell'area Aritmetico-algebrica nella scuola primaria e secondaria 1°: Il Progetto ArAl. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 29*(6), 701-712.

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology, 103*(1), 85-104.

Stephens, M. (2006). Describing and exploring the power of relational thinking. In P. Grootenboer, R.

Zevenbergen, & M. Chinnappan (eds.), *Proceedings of the 29th annual conference MERGA2006: Identities, cultures and learning spaces* (pp. 479-486). Canberra, Australia: MERGA.

Vergnaud, G., Benhadj, J., & Dussuoet, A. (1979). *La Coordination de l'Einsegnement del Mathématiques entre le cours moyen 2e année et la classe de sexième.* Lione: Institut National de Recherche Pédagogique.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* Milano: Springer.