ISSN: 2036-5330
DOI: 10.32076/RA11109

Progettare attività didattiche inclusive: un esempio di percorso sulle frazioni

Designing inclusive educational activities: an example on fractions

Giulia Lisarelli & Anna Baccaglini-Frank[1]
Federica Poli[2]

Sintesi

In questo articolo sono riportati vari studi sulle difficoltà di apprendimento in matematica e, in particolare, sulle difficoltà relative all'apprendimento delle frazioni, specialmente da parte degli studenti con difficoltà di apprendimento. Recentemente le autrici hanno intrapreso con l'Istituto Provinciale per la Ricerca e la Sperimentazione Educativa (IPRASE) il progetto "Didattica della Matematica Inclusiva", nato con l'obiettivo di sviluppare buone pratiche didattiche ad ampio spettro, ossia attività di classe che siano inclusive e che promuovano lo sviluppo dei significati matematici. Alla luce della letteratura presentata, sono illustrate le tappe principali del percorso sulle frazioni che verrà proposto a partire dall'anno scolastico in corso nelle classi che partecipano a questo progetto.

Parole chiave: Didattica inclusiva, Difficoltà di apprendimento, Frazioni, Senso del numero.

Abstract

This article reports about various studies on learning difficulties in mathematics and, in particular, on difficulties related to learning fractions, especially by students with learning difficulties. The authors, together with the Istituto Provinciale per la Ricerca e la Sperimentazione Educativa (IPRASE), have recently undertaken the project "Didattica della Matematica Inclusiva" (Didactics of Inclusive Mathematics), with the aim of developing wide-ranging good teaching practices, i.e. class activities that are inclusive and that promote the development of mathematical meanings by all students. In the light of the literature presented, the authors outline the main steps in a process of teaching fractions that will be proposed starting from the current school year in the classes participating in this project.

Keywords: Inclusive didactics, Learning difficulties, Fractions, Understanding of numbers.

1. Università di Pisa, Dipartimento di Matematica, giulia.lisarelli@dm.unipi.it

2. EISP – English International School of Padua. Collaboratrice del progetto di ricerca-azione IPRASE "Didattica della Matematica Inclusiva, all'interno del progetto di sistema "Le nuove frontiere del diritto all'istruzione. Rimuovere le difficoltà d'apprendimento, favorire una scuola inclusiva e preparare i cittadini responsabili e attivi del futuro - Fase 2", cofinanziato dal Fondo Sociale Europeo nell'ambito del PO 2014-2020 della Provincia autonoma di Trento.

1. Introduzione

Un'alta percentuale di studenti sviluppa difficoltà persistenti in matematica durante la scuola primaria; secondo un'indagine del 2005 circa il 20% degli studenti alla fine della scuola primaria ha prestazioni sotto-norma nei test prestazionali usati per le diagnosi di discalculia, tanto da risultare positivo rispetto alla discalculia (Lucangeli, 2005). Si tratta di un dato altissimo: non è verosimile che una percentuale così elevata di studenti soffra di discalculia, ma sicuramente questo dato ci dice che molti - troppi - studenti hanno avuto esperienze fallimentari nell'apprendimento della matematica.

Vari studi, tra cui uno abbastanza recente di Lewis e Fischer (2016), hanno messo in luce la seguente problematica: i test usati per l'identificazione di Mathematical Learning Disability (MLD) non controllano fattori non cognitivi e quindi le diagnosi che ne risultano non riescono a discriminare tra basse prestazioni dovute a difficoltà cognitive e non cognitive. Per esempio, generalmente non si tiene conto del ceto sociale di appartenenza, delle abilità linguistiche nella lingua in cui viene svolto il test o di altri fattori come etnia e genere. A questo proposito, Heyd-Metzuyanim (2013) ha osservato come il costrutto "disabilità dell'apprendimento" non consenta di distinguere tra difficoltà che portano a una disabilità persistente in matematica e difficoltà che sono il risultato di esperienze didattiche inadeguate. Per questo (e altri fattori emersi dall'analisi) la popolazione risulta estremamente eterogenea, cioè una stessa diagnosi può essere riconosciuta a studenti con bisogni educativi anche molto diversi tra loro.

Alla luce dei dati che sono emersi e di questa eterogeneità della popolazione, a nostro avviso diventa necessario, da un lato, identificare i profili di apprendimento matematico degli studenti e, dall'altro, offrire pratiche e strumenti didattici adeguati alle esigenze di ogni studente all'interno della classe, in un'ottica inclusiva. Infatti, la realtà scolastica ci mostra che la maggior parte degli studenti risultati positivi ai test sono falsi positivi, in quanto le basse prestazioni persistenti possono tornare in norma se vengono proposte adeguate pratiche didattiche. Un esempio concreto è dato dal progetto PerContare[3] (2011-2014) rivolto ai primi due anni della scuola primaria e nato per la prevenzione e il recupero delle difficoltà matematiche. L'uso delle pratiche didattiche proposte in tale percorso ha portato a una diminuzione degli studenti positivi ai test diagnostici per la discalculia di oltre il 50% nelle classi sperimentali rispetto a quelle di controllo.

Boaler, Williams & Confer (2015), in un articolo molto interessante, hanno mostrato e discusso una serie di danni che possono essere causati da pratiche didattiche errate, ma spesso molto diffuse. La paura della matematica non è qualcosa che ci portiamo dietro dalla nascita, piuttosto è un sentimento che si sviluppa con l'esperienza scolastica. Per esempio, l'insegnamento della matematica è in molti casi caratterizzato da una pressione che viene dettata dai test a tempo e dalla memorizzazione meccanica e che può avere conseguenze negative sull'apprendimento. Infatti, ciò che viene messo in luce nell'arti-

3. Per maggiori informazioni sul progetto si veda www.percontare.it

colo è che tali pratiche didattiche non favoriscono lo sviluppo del senso del numero da parte degli studenti, che addirittura finiscono per convincersi che in matematica non sia importante la costruzione di significato. È sicuramente importante riuscire a ricordare alcune informazioni a memoria, qualche "fatto matematico", come il risultato di semplici operazioni, così che non si debba ogni volta rifare il calcolo, ma ci basta richiamare il fatto. Tuttavia, per imparare un fatto non è necessario, e spesso nemmeno fruttuoso, ripeterlo tante volte e poi essere sottoposti a test sulla memorizzazione, ma utilizzarlo in diversi contesti matematici.

A questo proposito citiamo le parole di Rosetta Zan, riprese da un intervento su MaddMaths[4]:

> "Il disagio che molti bambini vivono con la matematica già a livello di scuola primaria è legato a un'esperienza con questa disciplina in cui errore e lentezza sono considerati indicatori di fallimento, e quindi vanno assolutamente evitati. Il successo è identificato con la risposta corretta data velocemente, con la naturale conseguenza che chi sbaglia o chi non è abbastanza veloce si sente tagliato fuori, inadeguato, incapace."

Nel contesto scolastico italiano un esempio di attività, che spesso è praticata alla scuola primaria, in cui si fa attenzione solo al prodotto e alla velocità con cui esso viene ottenuto è la "gara di tabelline". Nello stesso intervento su MaddMaths Anna Baccaglini-Frank suggerisce una riflessione sulla possibilità di lavorare con diversi ragionamenti matematici per favorire l'apprendimento di semplici prodotti (si vedano anche Baccaglini-Frank, 2015, e Baccaglini-Frank & Bartolini Bussi, 2016), fino a ricordarli "a memoria". Infatti, l'utilità di apprendere le tabelline è quella di poter svolgere quei prodotti senza doverci pensare, ma è altrettanto importante essere in grado di ricostruire il ragionamento perché è quello che ci permette di riutilizzare tali prodotti in nuovi processi matematici.

Recentemente le autrici del presente articolo hanno intrapreso con l'Istituto Provinciale per la Ricerca e la Sperimentazione Educativa (IPRASE) un progetto chiamato "Didattica della Matematica Inclusiva", che è rivolto a docenti e studenti delle classi prime e seconde della scuola secondaria di primo grado. Il progetto nasce con l'obiettivo di sviluppare buone pratiche didattiche ad ampio spettro, ossia attività di classe che siano inclusive, adattabili a diversi profili di apprendimento e che promuovano lo sviluppo dei significati matematici da parte degli studenti.

Nell'articolo sono riportati dapprima vari, rilevanti studi sulle difficoltà di apprendimento in matematica e poi, più specificamente, studi in cui vengono discussi i problemi che spesso sono associati all'apprendimento delle frazioni e dei numeri decimali - uno scoglio particolarmente grosso in questi anni scolari - in particolare da parte degli studenti con MLD. Alla luce della letteratura presentata, saranno poi illustrate le tappe principali del percorso sulle frazioni che verrà proposto a partire dall'anno scolastico in corso nelle classi che partecipano a questo progetto.

2. Cos'è il MathPro Test

Discussa l'importanza delle buone esperienze didattiche sia per prevenire che per affrontare difficoltà persistenti in diversi ambiti

4. Per l'intervento completo si veda http://maddmaths.simai.eu/didattica/errori-lentezza/

della matematica, il progetto "Didattica della Matematica Inclusiva" prevede la somministrazione del MathPro test nelle classi coinvolte, all'inizio e alla fine dell'anno scolastico, e la creazione e la sperimentazione di percorsi pensati alla luce dei diversi profili di apprendimento matematico degli studenti. In questa sezione viene descritto a grandi linee in cosa consiste questo test e quali informazioni può dare a partire dalle prestazioni degli studenti, delineando i diversi profili di apprendimento che possono emergere.

Per quanto riguarda gli studi sulle difficoltà di apprendimento in matematica, prendiamo come riferimento principale la direzione di ricerca in cui si collocano i recenti studi condotti da Karagiannakis, Baccaglini-Frank, Papadatos e Roussos (Karagiannakis, Baccaglini-Frank & Papadatos, 2014; Karagiannakis, Baccaglini-Frank & Roussos, 2017). Questi studi si sono proposti di cercare "profili di MLD", o "profili di discalculia", ossia di individuare gruppi di studenti con sintomi simili in diversi ambiti dell'apprendimento della matematica (Price e Ansari, 2013; Träff *et al.*, 2017). In particolare, è stato messo a punto un modello, basato su una riorganizzazione delle principali ipotesi avanzate in psicologia e nelle neuroscienze, che mette in relazione le ipotesi sulle cause del disturbo con conseguenze sullo sviluppo di particolari abilità matematiche (non solo aritmetiche), divise in quattro domini:

1. numerico di base: senso del numero, stima (continua e discreta), posizionamento sulla linea dei numeri, gestione degli aspetti lessicali, sintattici, semantici del numero; comprensione del significato dei simboli delle operazioni;
2. memoria: immagazzinamento e recupero di termini nuovi e definizioni, recupero fatti numerici, conoscenza del lessico, decodifica di proprietà o procedure in forma verbale, svolgimento accurato di calcoli a mente, richiamo di uso di formule e procedure;
3. ragionamento logico-matematico: comprensione idee, concetti, principi logici, relazioni; comprensione passi di una sequenza di procedure/algoritmi complessi; gestione di processi di problem solving;
4. visuo-spaziale: esecuzione di calcoli scritti, gestione di aspetti visuo-spaziali dei numeri, interpretazione e uso di rappresentazioni geometriche, visualizzazione, uso della linea dei numeri, interpretazione e costruzione grafici, controllo di informazioni rilevanti in ambito visuo-spaziale.

La bontà di questo modello è stata testata con una batteria di prove matematiche somministrate al computer: il MathPro test. Gli item che vengono proposti in questa batteria sono stati elaborati a partire sia dalle prove usate per rilevare deficit associati alle principali ipotesi sulla discalculia, sia dall'esperienza didattica di esperti in modo che, oltre all'ambito aritmetico, vengano valutate abilità legate anche ad altri ambiti matematici.

Un dato importante che è emerso dalla standardizzazione della batteria è l'esistenza di profili addirittura complementari di studenti che, rispetto ai parametri ottenuti con studi precedenti, sarebbero semplicemente stati definiti "aventi MLD". L'importanza di tale fenomeno sta nel fatto che questi studenti sarebbero stati probabilmente trattati nello stesso modo da un punto di vista educativo, mentre il modello consente di correlare le specifiche difficoltà di ogni studente con particolari tipi di consegne matematiche. In questo modo si hanno dati molto più utili per progettare interventi didattici appropriati.

Dunque l'individuazione di profili di apprendimento matematico attraverso il MathPro test è estremamente utile per poter poi sviluppare interventi di potenziamento mirati e adattabili al singolo studente, ma anche pratiche didattiche proponibili in un contesto inclusivo a classe intera.

3. Uno sguardo alla letteratura sulle difficoltà di apprendimento in matematica e su buone pratiche didattiche volte all'inclusione

3.1 Alcuni quadri di riferimento per la progettazione di attività didattiche inclusive

Nel contesto italiano ci sono stati vari studi che si sono occupati di gettare le basi per una didattica inclusiva. In particolare, prendiamo come riferimento gli studi che promuovono una didattica multimodale volta a favorire l'apprendimento da parte di studenti con MLD (per esempio, si veda Baccaglini-Frank & Robotti, 2013; Baccaglini-Frank, Antonini, Robotti & Santi, 2014; Robotti *et al.*, 2015). In un'ottica multimodale, nel processo di insegnamento saranno coinvolti artefatti sia fisici che digitali, in modo da fornire agli studenti molteplici mezzi di rappresentazione e, quindi, molteplici canali di accesso all'informazione. In linea con quanto sostenuto dalla lente teorica adottata, che viene illustrata di seguito, questo aspetto è cruciale se vogliamo promuovere una didattica inclusiva che riesca a coinvolgere studenti con bisogni educativi diversi tra loro.

Un quadro interessante e utile per la progettazione di attività didattiche in ottica inclusiva è quello descritto da Schreffler, Vasquez, Chini e James (2019). Si chiama "Universal Design for Learning" (UDL) e le sue origini non sono prettamente legate alla didattica della matematica. Infatti, l'espressione "Universal Design" è stata usata per la prima volta nel 1988 da un architetto della North Carolina State University per descrivere la progettazione di ambienti e oggetti che possono essere usati e sfruttati dal maggior numero possibile di persone, senza la necessità di doverli adattare o riprogettare in base alle diverse esigenze. In particolare, l'architetto e i suoi colleghi si erano interessati alla progettazione di edifici e strutture che fossero accessibili anche alle persone con disabilità. Sulla base di questa stessa idea si è poi sviluppato il quadro dell'UDL. Di tale quadro sono state messe in evidenza le seguenti due caratteristiche: a) l'informazione viene presentata agli studenti in maniera flessibile, così come è flessibile il modo in cui si chiede agli studenti di dimostrare la loro conoscenza e il modo in cui vengono coinvolti; b) l'obiettivo didattico è supportare prestazioni alte per tutti gli studenti, anche quelli con disabilità. In ogni caso, anche gli studenti senza alcuna disabilità possono trarre vantaggio da un percorso pensato in ottica UDL.

Per esempio, se pensiamo alle risposte e alle reazioni degli studenti di una classe a uno stesso percorso di insegnamento, ci rendiamo conto che possono essere estremamente variabili e questa variabilità è legata alle differenze tra gli individui e ai loro modi di apprendere. Tradizionalmente ciò che si tende a fare come insegnanti è cercare di uniformare la classe, e considerare tali differenze come ostacoli per l'apprendimento; invece le differenze possono essere sfruttate e rappresentare delle risorse per la classe. Il quadro dell'UDL suggerisce di partire dalle differenze e dalle peculiarità di ciascuno studente per la progettazione di attività didattiche, in modo da pensare ad attività che possano rispondere il più possibile alle esigenze dei singoli studenti.

Il quadro dell'UDL si articola secondo tre principi che mettono in luce la necessità di utilizzare:

- molteplici mezzi di rappresentazione, in modo da fornire agli studenti diversi modi di acquisire le informazioni e la conoscenza;
- molteplici mezzi di espressione, per garantire agli studenti più alternative possibili per esprimere il loro apprendimento;
- molteplici mezzi di coinvolgimento, che possano motivare gli studenti, il loro interesse e la loro curiosità.

L'approccio multimodale di cui sopra è concepito rispetto a tale molteplicità di mezzi di rappresentazione, espressione e coinvolgimento.

Le autrici si sono chieste come poter sfruttare questi tre principi nella progettazione di attività didattiche, in modo da tener conto anche dei diversi profili di apprendimento. In seguito sarà mostrato un esempio di come possono essere incorporati i tre principi in un processo di insegnamento/apprendimento della matematica. Il caso specifico riguarda uno studio di come si possono offrire agli studenti molteplici mezzi di rappresentazione e di comunicazione del significato di frazione e coordinare tali mezzi, in modo che possano essere sfruttati per comunicare e per condividere l'apprendimento.

Infine, un altro aspetto sul quale è stata focalizzata l'attenzione nella costruzione delle attività è l'uso di strategie e rappresentazioni che fossero il più possibile trasparenti rispetto ai significati matematici di riferimento. Secondo la descrizione elaborata da Lesh, Behr e Post (1987) una rappresentazione è "trasparente" se ha lo stesso significato dell'idea che vuole rappresentare, niente di più e niente di meno, mentre è "opaca" se tende a mettere in risalto determinate caratteristiche di quella idea e a nasconderne altre. La stessa rappresentazione può essere opaca in una certa situazione, ma trasparente in un'altra, perché ciò dipende da quale aspetto del significato matematico è coinvolto. Per esempio, se consideriamo $3 \cdot 5 + 1$ come rappresentazione del numero 16, possiamo dire che questa scrittura è trasparente rispetto alla divisibilità per 5 o per 3, ma opaca rispetto alla divisibilità per 2. Questo è un aspetto importante di cui tenere conto nel momento in cui siamo interessati a una didattica inclusiva. Infatti, la capacità di valorizzare i punti di forza di un sistema di rappresentazione e, allo stesso tempo, essere in grado di minimizzare le sue debolezze, sono componenti importanti per la comprensione e la buona gestione di un certo oggetto matematico. Per lavorare in questa direzione, l'insegnante può promuovere l'uso di diverse strategie o rappresentazioni evidenziandone gli aspetti salienti rispetto al contesto specifico in cui sta lavorando. Dallo studio di Lesh, Behr e Post (1987) emerge che spesso gli stessi studenti fanno riferimento a diverse rappresentazioni durante la risoluzione di un problema:

> «In our research, the opaque nature of representations has been salient; this is one reason why, in real or concrete problem-solving situations, we have found that students often make simultaneous use of several qualitatively different representational systems (e.g., a picture, spoken language, and written symbols) and that the salience of one system over others frequently varies from stage to stage in solution attempts» (p. 56).

Invece, ciò che tradizionalmente accade è che l'insegnante propone un'unica strategia risolutiva, basata su una particolare rappresentazione, che è trasparente rispetto a una determinata proprietà di un oggetto matematico, e poi si aspetta che gli studenti siano in grado di ricostruirsi da soli le altre proprietà di quell'oggetto, applicando sempre la stessa strategia.

3.2 Il senso del numero

Gray e Tall (1994) hanno condotto uno studio in cui hanno analizzato le strategie adottate da un gruppo di studenti, di età compresa tra i 7 e i 13 anni, per risolvere quesiti numerici. La loro ricerca ha messo in luce che gli studenti considerati dalla loro insegnante come studenti ad alto rendimento usavano il "senso del numero". Per spiegare cosa intendiamo con questa espressione riprendiamo le parole di Jo Boaler (traduzione a cura di Baccaglini-Frank, 2016):

> «Le persone che hanno sviluppato il senso del numero sono quelle che sanno usare i numeri in modo flessibile. Quando si chiede di calcolare 7×8, una persona che ha il senso del numero può aver memorizzato 56, ma sarebbe anche in grado di ricavarsi il risultato sapendo, per esempio, che 7×7 fa 49 e poi sommando 7 si ottiene 56, oppure che dieci volte 7 fa 70 a cui vanno sottratti due 7 (70-14). Non avrebbe bisogno di dover fare affidamento alla memoria a lungo termine» (p. 5).

In altre parole, si tratta di modificare la richiesta, data dall'insegnante o dal problema, in una richiesta equivalente che ci permette di affrontare il quesito in una maniera che a noi risulta più semplice. Per esempio, se ho il senso del numero sono in grado di manipolare i numeri e di usarli in modo flessibile nella risoluzione di problemi in cui applico determinate strategie a me familiari.

Vari studi hanno messo in luce che spesso una caratteristica degli studenti con MLD è che non hanno sviluppato un buon senso del numero, mentre il senso del numero è visto come una condizione necessaria per l'apprendimento in un primo momento dell'aritmetica e poi dell'algebra. Per esempio, la stessa ricerca (Grey & Tall, 1994) ha riportato che gli studenti considerati dalla loro insegnante come studenti a basso rendimento, diversamente dagli altri, non si dimostravano in grado di usare i numeri in maniera flessibile.

Inoltre, una mancanza del senso del numero sembra che contribuisca a generare difficoltà nella percezione di struttura dei numeri, che è un aspetto chiave per lo sviluppo del pensiero pre-algebrico (Mulligan & Mitchelmore, 2013).

A questo punto ha senso interrogarsi su quale sia l'approccio che tradizionalmente viene promosso in classe dall'insegnante e soprattutto verso quale direzione crediamo che possa portare questo approccio. Se, come spesso accade, gli studenti sono guidati fin da piccoli a cercare di imparare meccanicamente e memorizzare tabelline e fatti matematici, allora poi non si può assumere che siano in grado di manipolare i numeri in maniera flessibile e con significato. In altre parole, il senso del numero è inibito dall'enfasi eccessiva che viene data alla memorizzazione, e questo porta molti studenti a sviluppare difficoltà in matematica. Condividiamo di nuovo le parole di Jo Boaler (traduzione a cura di Baccaglini-Frank, 2016):

> «Più riteniamo importante la memorizzazione, meno gli allievi saranno disposti a pensare ai numeri e alle loro relazioni e ad usare e sviluppare il senso del numero» (p. 7).

Infatti, in linea con quanto è stato riportato prima, il senso del numero è fondamentale per lo sviluppo matematico degli studenti che, seguendo un approccio sbagliato, si trovano a imparare la matematica in modo più difficile e sono soggetti a commettere errori.

Vediamo adesso quali sono alcuni aspetti che vorrebbero essere promossi attraverso le attività proposte nel progetto, perché ritenuti fondamentali per sviluppare il senso del numero. Come prima cosa, il riconoscimento delle relazioni parte/tutto, che comporta una visione dell'addizione e della sottrazione come azioni dialetticamente correlate che nascono dalla relazione parziale e totale tra le quantità. Per il riconoscimento delle relazioni parte/tutto è importante che i numeri siano identificati come unità astratte che possono essere suddivise e poi ricombinate in modi diversi per facilitare il calcolo numerico, sia scritto che a mente. Inoltre, si lavora per favorire lo sviluppo da parte degli studenti di una rappresentazione interna della linea dei numeri. Infatti, il senso del numero è stato anche messo in relazione con la rappresentazione mentale della linea dei numeri, che contribuisce allo sviluppo di varie abilità aritmetiche fornendo agli studenti un mezzo rapido per accedere alle informazioni numeriche. Con linea dei numeri non si intende la retta dei numeri naturali, ma quella dei numeri reali, che comprende quindi anche le frazioni.

3.3. Frazioni e numeri decimali: significati e difficoltà

Per una panoramica molto più ampia della letteratura sulle frazioni si rimanda al contributo di Fandino Pinilla (2007), dal quale sono ripresi qui di seguito alcuni punti cruciali che sono stati particolarmente influenti nella progettazione della sequenza didattica. In particolare, saranno messi in luce gli aspetti che dovrebbero essere considerati nel caso, come nel progetto in questione, si voglia creare un percorso ad alte potenzialità rispetto a molti studenti. In altre parole, l'obiettivo del progetto è realizzare un percorso che favorisca e supporti l'apprendimento da parte di studenti con bisogni educativi diversi e che consenta loro una buona gestione della matematica anche a lungo termine.

La letteratura che mette in luce le principali difficoltà degli studenti relative all'apprendimento delle frazioni è molto vasta. Fandino Pinilla (2007, p. 101) ha riassunto gli errori e le difficoltà più comunemente incontrate nella lista di seguito riportata.

- Ordinamento di frazioni e numeri scritti in notazione decimale.
- Operazioni tra frazioni.
- Riconoscere semplici schemi.
- Uso dell'aggettivo "uguale".
- Equivalenza tra frazioni.
- Riduzione della frazione ai minimi termini.
- Interpretazione di immagini non standard.
- Passaggio dalla frazione all'unità che l'ha generata.
- Gestione autonoma di diagrammi, figure o modelli.

A partire da un'analisi e da una presa di coscienza di tali difficoltà è stato sviluppato dalle autrici un lavoro esplicitamente centrato e finalizzato alla corretta gestione delle frazioni sulla linea dei numeri reali. Spesso il significato di frazione come numero non solo non viene promosso dagli insegnanti, ma viene dato per scontato, quando invece non lo è assolutamente. Un dato noto è che in quasi tutto il mondo le frazioni vengono introdotte come parte/tutto, cioè data una certa unità, questa viene divisa in parti uguali e poi vengono "prese" alcune di queste parti. Si tratta di una definizione abbastanza intuitiva di frazione, legata all'azione di dividere l'unità in parti uguali, che però porta con sé un problema: diventa complicato, o addirittura può perdere di significato, parlare di frazioni con numeratore maggiore del denominatore. Per esempio, se consideriamo un'unità e la dividiamo in 8 parti uguali, possiamo prendere 9 di queste parti?

Un aspetto che probabilmente contribuisce a generare difficoltà nella gestione delle frazioni è il fatto che i significati di frazione sono molteplici. Per esempio, Kieren (1975) ha identificato ed elencato diversi significati e Fandino Pinilla (2007, p. 85) sottolinea che sarebbe necessario dedicare del tempo a ciascuno di essi, o almeno a ciascun significato di frazione che vorremmo fosse conosciuto dai nostri studenti.

I significati di frazione elencati da Kieren (1988; 1992) sono i seguenti:

1. parte/tutto: legato alla partizione di un'unità continua o discreta in parti uguali;
2. rapporto: legato alla nozione di proporzionalità;
3. operatore: la frazione come operatore da applicare a una certa quantità;
4. quoziente: il numeratore della frazione rappresenta una quantità che deve essere divisa per il numero indicato al denominatore, è una divisione espressa ma non eseguita;
5. misura: considerando *u* come unità di misura, la frazione si esprime come il prodotto tra il numeratore e l'unità frazionaria di *u.*

Un altro significato di frazione che non è espresso esplicitamente in questa lista numerata, ma interessante per questo studio, è quello di frazione come rappresentazione di un numero. Torneremo a breve su questo, ma prima osserviamo come tutti questi modi possibili di interpretare la frazione possono contribuire a rendere difficile la gestione del concetto matematico. Il concetto di frazione può essere definito come la caratteristica che hanno in comune tutti questi significati. Per questo motivo, per apprendere davvero e a fondo il concetto di frazione, occorre essere in grado di gestire tutti i suoi significati. Non è possibile promuovere apprendimento profondo, cioè quell'apprendimento che consente di lavorare con le frazioni in diversi contesti e che rimane anche a lungo termine, passando attraverso solo uno o pochi di questi significati, scelta didattica purtroppo assai frequentemente adottata. Per esempio, solitamente nelle scuole italiane il significato di frazione come operatore non viene esplicitamente legato al significato di frazione come un numero razionale. Il processo che solitamente viene proposto agli studenti consiste nel trasformare una frazione in numero decimale e poi posizionare questo numero (riconosciuto come numero razionale) sulla linea dei numeri.

Per quanto riguarda il significato di frazione come numero, citiamo i lavori del gruppo di ricercatori Cramer, Post, Behr, Harel e Lesh, che per molti anni si sono occupati di numeri razionali e pensiero proporzionale. In particolare, nel capitolo scritto da Lesh, Behr e Post (Lesh, Behr & Post, 1987) in cui si parla di rappresentazioni trasparenti e opache, emerge che l'apprendimento dei numeri razionali da parte di studenti del secondo anno della scuola secondaria di primo grado, valutato sulla base di test, risulta parecchio instabile. La spiegazione che viene proposta è che forse gli studenti di quel grado scolare cercano nuove strategie risolutive, che si basano su un approccio più algebrico-simbolico, ma poi non riescono a gestirle bene.

Sempre dalla letteratura emerge che molto spesso gli studenti trattano le frazioni come se fossero un insieme numerico a sé stante (Siegler *et al.,* 2013; Gabriel *et al.,* 2013; Wu, 2011) e questo causa numerose difficoltà. Per promuovere l'ordinamento delle frazioni e il posizionamento sull'asse reale è necessario lavorare sul significato di frazione come numero, che comunque si lega anche a quello di frazione come quoziente. Possibili ostacoli alla realizzazione di una richiesta come il posizionamento sull'asse reale, secondo Bonotto (1992), sono l'enfasi che viene data ai numeri naturali, e il conflitto che può nascere tra l'apprendimento delle frazioni e dei numeri decimali, se sono avvenuti separatamente.

Inoltre, una fonte di difficoltà per molti studenti sembra essere il fatto di identificare la frazione con due numeri, perché numeratore e denominatore vengono considerati separatamente come due numeri interi; quindi per riuscire ad avere una buona gestione dell'oggetto matematico sono necessari attenzione e controllo che richiedono un grosso carico cognitivo (Ni, Zhou 2005; Siegler *et al.,* 2013). La memoria di lavoro, infatti, sembra essere molto più appesantita durante il processamento e la rappresentazione di frazioni, rispetto a quella di singoli numeri interi (Halford, Cowan & Andrews, 2007).

Chiariti tutti questi aspetti, è evidente che per uno studente con MLD l'apprendimento delle frazioni risulta un compito particolarmente arduo. Per esempio, riuscire a vedere la frazione come un unico numero vuol dire inibirne la visione come due numeri separati e Szűcs *et al.* (2013) hanno messo a fuoco che la discalculia risulta specificamente radicata nei casi in cui la memoria di lavoro visuo-spaziale e il controllo inibitorio sono deboli.

Per realizzare un percorso didattico sulle frazioni, finalizzato al recupero delle conoscenze pregresse e all'introduzione di altri significati della frazione, è stato ripreso il lavoro di Robotti, Censi, Segor e Peraillon (2016). In particolare, rispetto al percorso progettato e proposto dagli autori del libro, che si rivolge a docenti e studenti della scuola primaria, sono state riguardate le tempistiche, riducendo ad alcuni mesi la sequenza di attività prevista per essere svolta in tre anni. Inoltre sono state integrate e modificate le attività per adattarle al contesto di scuola secondaria di primo grado, ponendo meno l'accento sull'uso di colori e cartoncini da ritagliare o da piegare perché si tiene conto della maggiore capacità di astrazione degli studenti della secondaria di primo grado rispetto a quelli della scuola primaria.

4. Il progetto "Didattica della Matematica Inclusiva"

In linea con ciò che è stato precedentemente espresso in questo articolo, all'interno del progetto "Didattica della Matematica Inclusiva" si intende sviluppare e sperimentare percorsi didattici atti a favorire un apprendimento efficace dei concetti matematici introdotti nelle classi prima e seconda della scuola secondaria di primo grado. L'apprendimento promosso sfrutta artefatti fisici e digitali per consentire ai docenti di mettere in atto azioni personalizzate sulle esigenze formative di ogni allievo, anche rispetto ai profili di apprendimento matematico emergenti dal MathPro Test.

L'obiettivo è di intervenire tempestivamente per il recupero delle difficoltà note o emergenti al termine della scuola primaria e contribuire alla buona preparazione degli studenti della scuola secondaria di primo grado per gli studi successivi e i futuri percorsi professionali che si basano sulle STEM, termine usato per indicare le discipline scientifico-tecnologiche (scienza, tecnologia, ingegneria e matematica). Inoltre, un importante aspetto di questa ricerca-azione è la formazione degli insegnanti, perché possano utilizzare efficacemente i prodotti della sperimentazione in itinere e, soprattutto, a conclusione della sperimentazione.

La metodologia utilizzata è di tipo Design Based Reasearch. Si tratta di una metodologia scientifica utilizzata in progetti educativi che prevedono la realizzazione di materiali e percorsi didattici da sperimentare e rivedere in cicli successivi (si vedano, ad esempio, Burkhardt & Schoenfeld, 2003; Swan, 2014). In questo progetto sono previste due iterazioni del ciclo di *progettazione*, *implementazione* e *valutazione formativa*; quest'ultima è essenziale per individuare potenziali debolezze da superare con nuove scelte di progettazione da implementare al ciclo successivo.

In questo momento ci troviamo nella prima fase del progetto, quella in cui vengono proposti ai docenti sperimentatori vari esempi e pratiche didattiche sia in formato video che con materiali didattici di supporto. In un secondo momento sarà discusso e messo a punto tutto il materiale prodotto e seguiranno ulteriori cicli di sperimentazione.

Non entriamo nel merito di tutte le attività e materiali, ma ripercorriamo alcune tappe fondamentali del percorso sulle frazioni.

4.1 Esempi di attività dal percorso sulle frazioni

Il percorso sulle frazioni offre diverse rappresentazioni della frazione, in accordo con il primo principio dell'UDL. L'obiettivo delle attività descritte in seguito è quello di realizzare una sequenza che favorisca, per tutti gli studenti della classe, lo sviluppo dei vari significati matematici delle frazioni e in particolare quello di frazione come numero, che quindi può essere posizionato sulla linea dei numeri.

Questa sezione è dedicata alla descrizione di alcune tappe fondamentali del percorso che, come discusso prima, è ispirato al lavoro per la scuola primaria di Robotti, Censi, Segor e Peraillon (2016). In particolare, il contributo di questi autori è stato ricalcato in due passaggi chiave per la costruzione del significato e di una rappresentazione della frazione: dalla frazione come parte/tutto alla frazione come misura, aspetto che è legato al significato di frazione come operatore, e poi dalla frazione come misura alla frazione come numero da posizionare sulla retta reale.

La prima attività richiede di suddividere in parti uguali un foglio A4 bianco, che rappresenta l'unità di misura di riferimento. Per la suddivisione gli studenti usano varie strategie: pieghe, righello, forbici. Ad esempio, alla richiesta di suddividere il foglio in due parti uguali (unità frazionaria ½), ogni studente procederà a suo modo ottenendo così unità frazionarie di forma diversa. La discussione in classe si concentra sull'equivalenza delle varie unità frazionarie create, a prescindere dalla loro forma. Tale equivalenza, se necessario, è verificabile in modo cinestetico-tattile attraverso forbici, pieghe, isometrie (rotazioni, traslazioni, sovrapposizioni…). Questo è un esempio in cui gli studenti sono coinvolti e viene loro chiesto di dimostrare la loro conoscenza in maniera flessibile, in accordo con l'UDL. Spesso, l'uso del righello da parte di alcuni studenti li porta a eliminare una parte di foglio per ricondursi a misure più facili da gestire (il foglio A4 non ha infatti dimensioni intere: 21cm • 29,7cm). Tramite la discussione è possibile pertanto consolidare il significato di unità frazionaria come parte di un'unità di misura.

Lavoro analogo su altre unità frazionarie viene svolto direttamente sul quaderno in cui si rappresenta l'unità di misura identificandola con un rettangolo 6x12 quadretti (Figg. 1a e 1b). Il significato di frazione che viene toccato in questo modo è quello di parte (unità frazionaria) di un tutto (unità di misura). Come possiamo vedere nelle Figg. 1a e 1b, questo tipo di attività consente di introdurre anche le frazioni equivalenti in termini di equivalenza tra superfici.

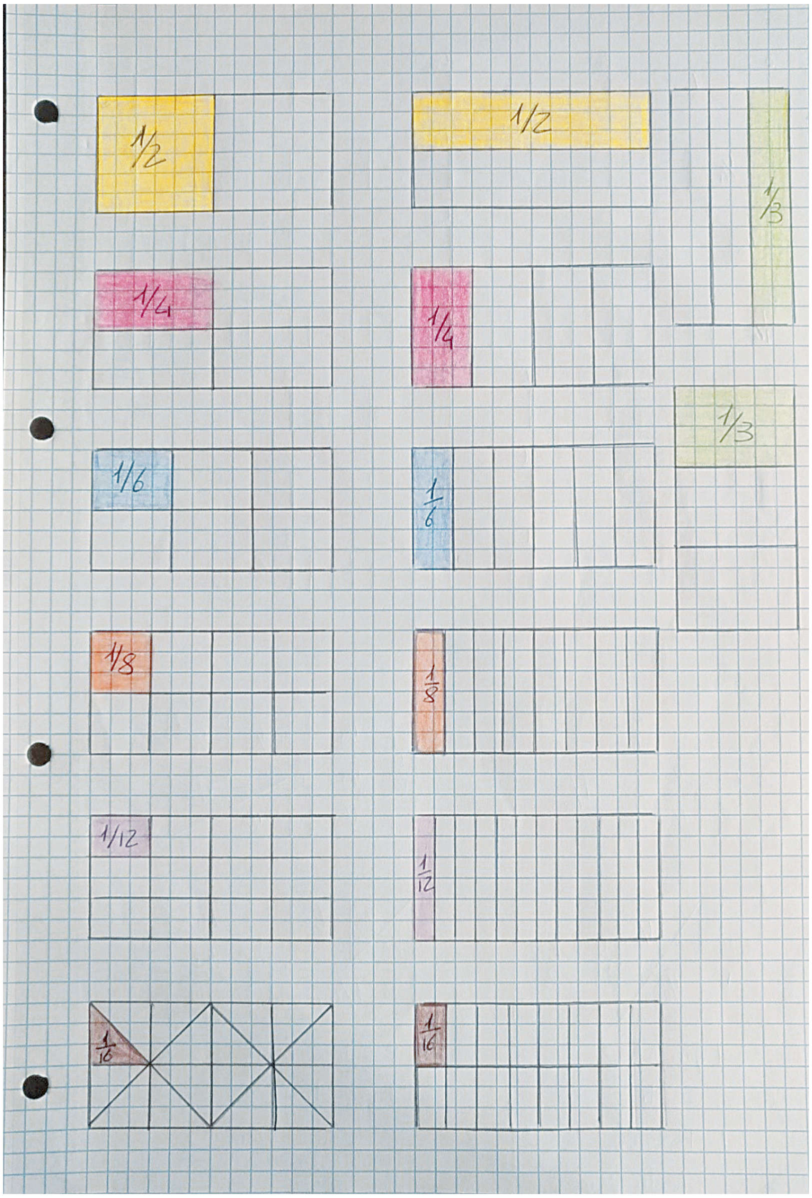

Fig. 1a - *Unità frazionarie ottenute suddividendo in parti uguali l'unità di misura.*

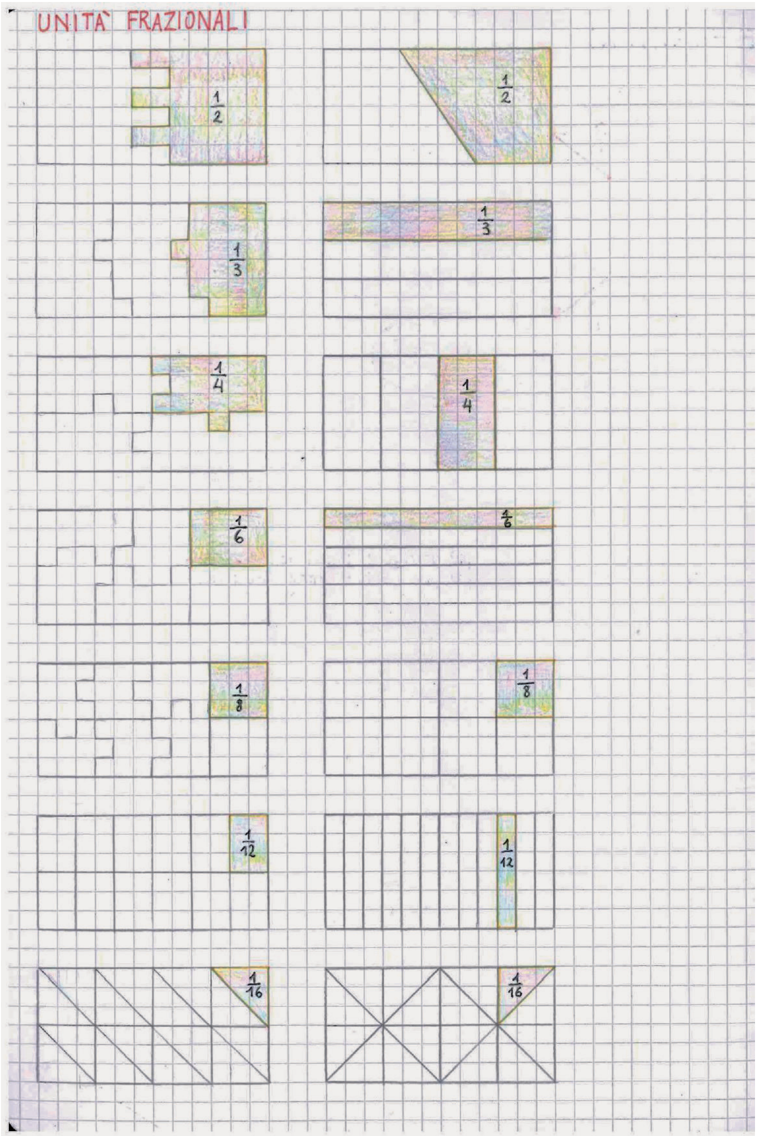

Fig. 1b - *Unità frazionarie ottenute suddividendo in parti uguali l'unità di misura.*

Inoltre, nelle attività in cui si richiede di suddividere il rettangolo sul quaderno, si lavora sulla somma di frazioni per ottenere il "tutto", cioè l'unità di misura scelta. In particolare è possibile ottenere l'unità di misura come somma di opportune unità frazionarie diverse. (Fig. 2). Come si può osservare in Fig. 2, la scelta delle unità frazionarie da utilizzare per ottenere l'unità può essere lasciata agli studenti, così da coinvolgerli attivamente, motivare il loro interesse e la loro curiosità (principio 3 dell'UDL). In questo modo saranno realizzate composizioni del rettangolo anche molto diverse tra loro. Questo aspetto può essere sfruttato in classe: condividendo e confrontando le produzioni degli studenti si ottengono molteplici rappresentazioni dell'unità come somma di unità frazionarie (principio 1 dell'UDL).

L'obiettivo della prima attività è il confronto tra diverse unità frazionarie che risulta percettivamente evidente dalle strisce disegnate sul quaderno una sotto l'altra e allineate a sinistra in corrispondenza dello zero. In particolare dal confronto emergono anche le frazioni equivalenti.

L'obiettivo della seconda attività è di rendere invece esplicita la dipendenza dell'unità frazionaria dall'unità di misura scelta.

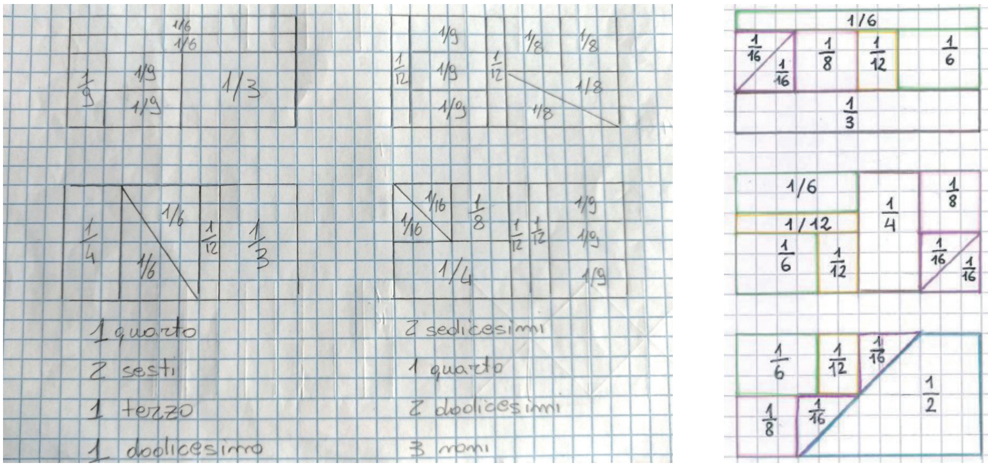

Fig. 2 - *L'unità come somma di unità frazionarie diverse.*

La seconda fase prevede il passaggio dal foglio intero a una striscia di carta quadrettata. Per prima cosa viene fissata una certa unità di misura, posizionata sulla striscia, e poi suddivisa in unità frazionarie (Figg. 3a e 3b). In un'altra attività vengono invece fissate unità di misura diverse su strisce diverse e poi, su ognuna di queste strisce, viene rappresentata una stessa unità frazionaria. La principale peculiarità di questa seconda fase è che fa emergere una diversa rappresentazione delle unità frazionarie (principio 1 dell'UDL), espresse in termini di porzioni di striscia.

Un altro importante potenziale dell'artefatto "striscia" è il permettere di superare un problema già accennato in precedenza che deriva dall'uso di modelli come torte o tavolette di cioccolato: se consideriamo un'unità e la dividiamo in 8 parti uguali, possiamo prendere 9 di queste parti? In questo tipo di modelli per rappresentare una frazione maggiore di uno bisogna ricorrere, ad esempio, a due torte con il rischio di generare confusione: 9/8 o 9/16? Nell'artefatto "striscia", invece, è possibile rappresentare frazioni maggiori dell'unità, considerando n-volte l'unità frazionaria.

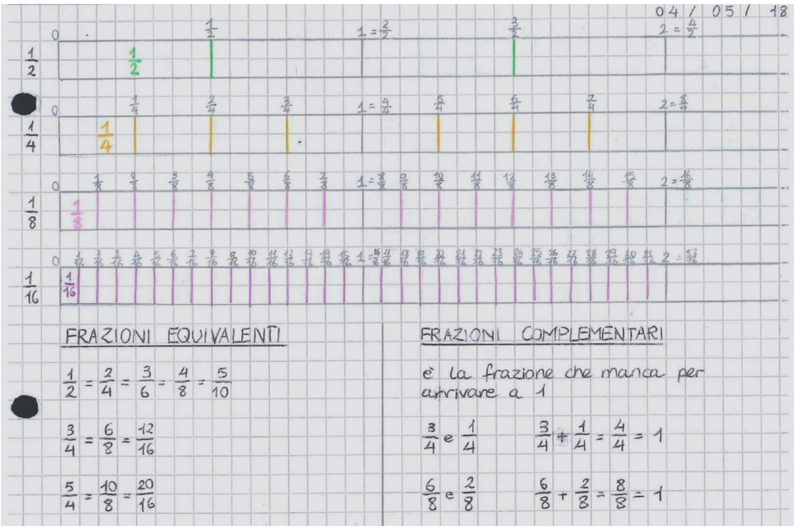

Fig. 3a - *Unità frazionarie sulla striscia.*

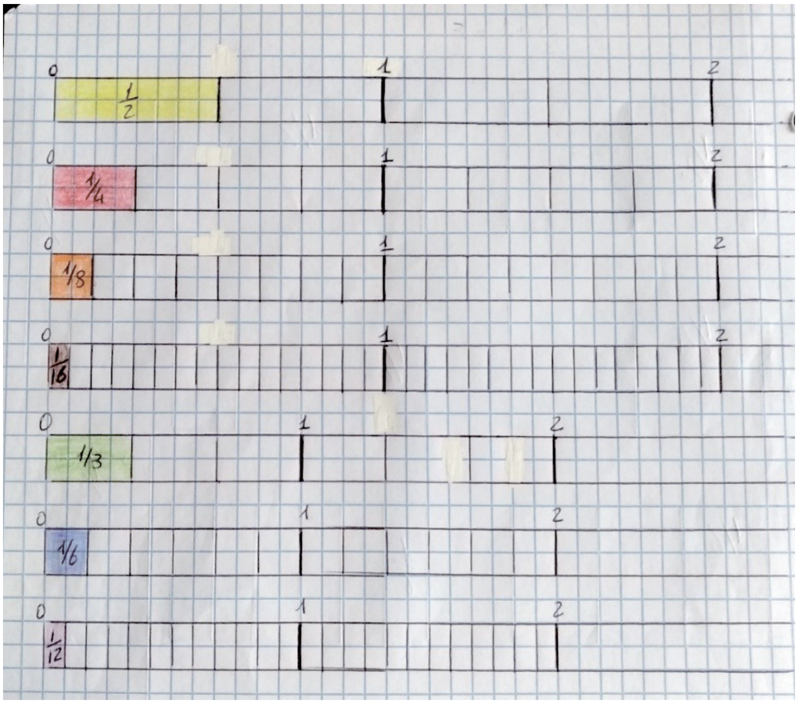

Fig. 3b - *Unità frazionarie sulla striscia.*

Il passo successivo è la rappresentazione sulla stessa striscia di unità frazionarie e frazioni diverse, per introdurre il confronto tra queste. Per fare questo ci si accorge che è necessario passare a un multiplo comune, cioè emerge la necessità di fissare un'unità di misura "adatta" per poter rappresentare sulla stessa striscia unità frazionarie o frazioni con denominatori diversi. Eventualmente, si può così arrivare a parlare di minimo comune multiplo.

La rappresentazione di tutte le frazioni sulla stessa striscia fa emergere la necessità di un modo diverso di segnare la frazione e si passa quindi da un'unità frazionaria come area di un rettangolo a una semplice tacca che ne individua la posizione (Fig. 4). Il passaggio è di fondamentale importanza verso la rappresentazione del numero sulla linea dei numeri.

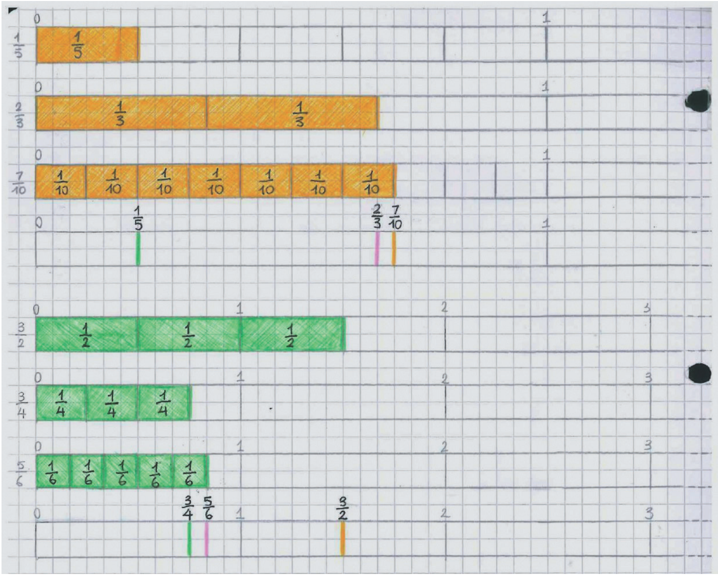

Fig. 4 - *Dalla frazione come area alla tacca che ne individua la posizione.*

Dalla striscia, infine, diminuendo sempre di più una delle due dimensioni, arriviamo a una retta e quindi al posizionamento delle frazioni sulla linea dei numeri, che è uno degli obiettivi principali di tutto il percorso (Fig. 5). Con questa fase si arriva a proporre agli studenti la terza rappresentazione delle unità frazionarie (principio 1 dell'UDL), come tacche da posizionare su una retta ordinata.

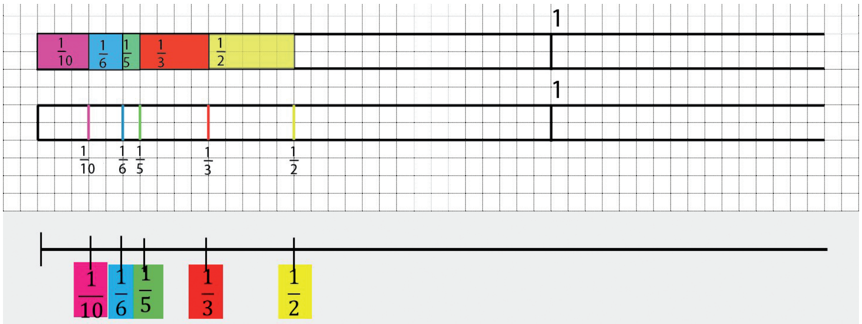

Fig. 5 - *Dalla frazione come area alla frazione come numero.*

Durante queste tappe fondamentali del percorso illustrato, quello che succede al significato di frazione è che si passa da porzione di un'area, prima di foglio e poi di striscia, alla lunghezza di un segmento con origine in zero, fino a identificarla con il solo estremo destro di tale segmento per poterla meglio collocare sulla linea dei numeri. Poiché l'estremità destra del segmento sulla linea dei numeri è etichettata con la frazione, assumerà anche il significato di "numero", come tutti gli altri numeri interi sulla linea. Il fatto poi che a uno stesso punto della linea possono essere associate frazioni diverse, fa emergere nuovamente i concetti di "frazioni equivalenti" e numeri razionali come "classi di equivalenza". La frazione "capoclasse", quella ridotta ai minimi termini, diventa la rappresentante di tutte le frazioni a essa equivalenti e ciò consente di attribuire un significato ai numeri razionali che non passa necessariamente attraverso la rappresentazione decimale, a differenza di quanto avviene spesso nella pratica didattica.

5. Conclusioni

Una domanda che le autrici si sono poste e che ogni insegnante, educatore e formatore dovrebbe porsi, è: "Cosa significa fare matematica?". Perché a seconda di come si risponde, e quindi della visione che si ha della matematica, ha origine la matematica che viene proposta agli studenti e quindi l'idea che si faranno gli studenti di cosa voglia dire fare matematica e cosa è importante in matematica. La risposta data in questo articolo è che fare matematica significa *ragionare*. Partendo da questa idea di fondo, il lavoro che viene proposto e che caratterizza gran parte delle attività all'interno del progetto presentato si basa sull'esplicitazione dei *perché*. Per esempio, dedichiamo tempo per discutere con gli studenti perché ha più senso usare una certa strategia risolutiva piuttosto che un'altra o perché diverse strategie funzionano in uno stesso contesto.

Per quanto riguarda l'approccio alle frazioni, sono stati delineati quei passaggi ritenuti particolarmente significativi della sequenza di attività progettata, mostrando come entrano in gioco e sono gestiti i vari significati di frazione. Partendo da quello più tradizionale di frazione come operatore nel contesto delle aree suddivise (parte-tutto), si passa a un contesto leggermente diverso in cui le aree sono strisce, per arrivare a schiacciarsi fino a diventare tacche che indicano la distanza dall'origine nella linea dei numeri. In particolare, l'obiettivo finale del percorso è promuovere una buona gestione della frazione come numero, che viene perseguito in un'ottica inclusiva. Infatti, si è tenuto conto del coinvolgimento di molteplici rappresentazioni e di diversi significati della frazione, in linea con quanto suggerito dall'UDL e da vari altri studi che sono stati citati, per poter supportare l'apprendimento di tutti gli studenti, ma soprattutto degli studenti con MLD. Rimane da vedere che cosa succederà nelle classi. Dalle analisi a posteriori sui dati raccolti seguirà una revisione di questo percorso didattico e di tutti gli altri percorsi proposti durante questo primo anno del progetto di ricerca-azione. Al termine del progetto tutti i materiali sperimentati e rivisti almeno due volte saranno pubblicati gratuitamente su una piattaforma IPRASE.

Questo articolo si conclude con un passo ripreso da un'intervista a Ella Griffith-Tager, una studentessa di 13 anni che esprime in maniera molto chiara e diretta il suo punto di vista (Griffith-Tager, 2018). Oltre a riportare le sue parole perché condivise completamente dalle autrici, osserviamo che la studentessa tocca proprio degli aspetti cruciali menzionati nell'articolo e che insegnanti, educatori, formatori dovrebbero quotidianamente tener presente nella loro pratica didattica in un'ottica inclusiva.

> «I wish when I told teachers that I was dyslexic they would not change their voice tone - or make a face or seem to pity me - because I learn differently. It is not like it is stopping me from learning anything, and if it does I will find a way. And it is part of their job to help me find those ways and not cast off the ways that seem odd […] I learn how I learn. Don't compare me to how another dyslexic kid learns because each one of us is different. It is not just black or white, and make sure you ask me, "Will this work for you?" when it is something new» (Griffith-Tager, 2018, p. 9).

Finanziamenti

IPRASE, all'interno del progetto di sistema "Le nuove frontiere del diritto all'istruzione. Rimuovere le difficoltà d'apprendimento, favorire una scuola inclusiva e preparare i cittadini responsabili e attivi del futuro - Fase 2", cofinanziato dal Fondo Sociale Europeo nell'ambito del PO 2014-2020 della Provincia autonoma di Trento.

Bibliografia

Baccaglini-Frank, A. (2015). Preventing low achievement in arithmetic through the didactical materials of the PerContare project. In X. Sun, B. Kaur & J. Novotná (eds.). *ICMI Study 23 Conference Proceedings* (pp. 169-176). Macau – China: University of Macau.

Baccaglini-Frank, A. (2016). Matematica senza paura, trad. it. di J. Boaler, *Fluency without fear: Research evidence on the best ways to learn math facts*. Archimede, 1, pp. 5-13.

Baccaglini-Frank, A., & Robotti, E. (2013). Gestire gli studenti con DSA in classe. Alcuni elementi di un quadro comune. In C. Cateni, C. Fattori, R. Imperiale, B. Piochi e P. Vighi, *Quaderni GRIMeD* n. 1, pp. 75-86.

Baccaglini-Frank, A., Antonini, S., Robotti, E., & Santi, G. (2014). Juggling reference frames in the microworld mak-trace: the case of a student with MLD. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, D. Allan (Eds), *Proceedings of PME 38, 2*, pp. 81-88. Canada: PME.

Baccaglini-Frank, A., & Bartolini Bussi, M. (2016). Buone pratiche didattiche per prevenire falsi positivi nelle diagnosi di discalculia: Il progetto PerContare. *Form@re,* 15(3), pp. 170-184.

Boaler, J., Williams, C., & Confer, A. (2015). *Fluency without fear: Research evidence on the best ways to learn math facts.*
Retrieved from http://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2015/03/FluencyWithoutFear2015.pdf

Bonotto, C. (1992). *Uno studio sul concetto di numero decimale e di numero razionale. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 15(5), pp. 415-448.

Burkhardt, H., & Schoenfeld, A. (2003). Improving Educational Research: Toward a More Useful, More Influential, and Better-Funded Enterprise. *Educational Researcher*, 32(9), pp. 3-14.

Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, 7, pp. 23-45.

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*, 4(715).

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A «Proceptual» View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), pp. 116-140.

Griffith-Tager, E. (2018). A Special Education Student Speaks: Dealing With the Ups and Downs. *Education Week's Special Report: Special Education: Practice & Pitfalls.*

Halford, G. S., Cowan, N., & Andrews, G. (2007). Separating cognitive capacity from knowledge: a new hypothesis. *Trends in Cognitive Science*, 11, pp. 236–242.

Heyd-Metzuyanim, E. (2013). The co-construction of learning difficulties in mathematics–teacher–student interactions and their role in the development of a disabled mathematical identity. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), pp. 341–368.

Karagiannakis, G., Baccaglini-Frank, A., & Papadatos, Y. (2014). Mathematical learning difficulties subtypes classification. *Frontiers in Humans Neuroscience*, *8*(57).

Karagiannakis, G., Baccaglini-Frank, A. E., & Roussos, P. (2017). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian Journal of Learning Difficulties*, 21(2), pp. 115-141.

Kieren, T. E. (1975). On the mathematical cognitive and instructional foundations of rational number. In R. A. Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp. 101-144). Columbus, OH: Eric-Smeac.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181).

Reston (VA): NCTM-Lawrence Erlbaum Ass.

Kieren, T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge. Implications for curriculum and instruction. In R. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 323-371). Hillsdale , NJ: Lawrence Erlbaum Ass.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. R. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janiver (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lewis, K. E., & Fisher, M. B. (2016). Taking stock of 40 years of research on mathematical learning disability: Methodological issues and future directions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47, pp. 338-371.

Lucangeli, D. (2005). *National survey on learning disabilities*. Roma: Italian Institute of Research on Infancy.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2013). Early awareness of mathematical pattern and structure. In L. English & J. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp. 29–46). Dordrecht: Springer Science-Business Media.

Ni, Y. & Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. *Educational Psychology*, 40, pp. 27–52.

Price, G. R., & Ansari, D. (2013). Dyscalculia: characteristics, causes, and treatments. *Numeracy*, 6(2).

Robotti, E., Antonini, S., & Baccaglini-Frank, A. (2015). Coming to see fractions on the numberline. In *Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME 9), Prague.

Robotti, E., Censi, A., Segor, I., & Peraillon, L. (2016). Frazioni sul filo: Strumenti e strategie per la scuola primaria. *Collana Artefatti intelligenti*. Trento: Edizioni Centro Studi Erickson.

Schreffler, J., Vasquez III, E., Chini, J., & James, W. (2019). Universal Design for Learning in postsecondary STEM education for students with disabilities: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education*, *6*(8).

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(1), pp. 13-19.

Swan, M. (2014). Design research in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education (*pp. 148–152). Dordrecht: Springer Netherlands.

Träff, U., Olsson, L., Östergren, R., & Skagerlund, K. (2017). Heterogeneity of Developmental Dyscalculia: Cases with Different Deficit Profiles. *Frontiers in Psychology*, 7, pp. 115–16.

Wu, H. (2011). The Mis-Education of Mathematics Teachers. *Notices of the American Mathematical Society*, 58, pp. 372-384.